Đáp án Toán cao cấp A1 (ngày thi 09/08/2017)

1. $\Delta = i^2 - 4 = -5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{5}$ (0.5)

$$z_1 = \frac{-i + i\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} i \quad ; \qquad z_2 = \frac{-i - i\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} i \quad (0.5)$$

2. f liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ hay $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^3 + x^4}$ (0.5)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{6x + 12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{6 + 24x} = 0 \qquad (1)$$

3. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ nếu $x > 0$ (0.25)

$f'(x) = 2e^{2x}$ nếu $x < 0$ (0.25)

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \quad ; \quad f_-'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} (2e^{2x}) = 2 \quad (0.5)$$

Vì $f_+'(0) \neq f_-'(0)$ nên $f'(0)$ không tồn tại. (0.5)

4. A, B có tọa độ cực (r, φ), tọa độ Đề-các (x, y) với $y = -2 = r\sin\varphi$ (0.25)

Thay vào phương trình đường cong ta được $r = 1 - 3\sin\varphi = 1 + \dfrac{6}{r}$ (0.25)

Giải phương trình được $r = 3$ hoặc $r = -2$. Loại $r = -2$ dựa vào hình. (0.25)

Ta tìm được tọa độ $A(3; -138,2^o)$, $B(3; -41,8^o)$. (0.25)

5. $F(2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{t^2-9} dt$ (0.25)

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+3} \right) dt \ (0.25)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\ln|t-3|+\frac{1}{3}\ln|t+3|\right)\Big|_1^2$$ (0.25)

$$=-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$$ (0.25)

6. Ta có $\frac{x^{1.01}}{2x^2+\sqrt{4+x^2}}, \frac{1}{x^{0.99}}>0$ với mọi $x\geq 2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1.01}}{2x^2+\sqrt{4+x^2}}:\frac{1}{x^{0.99}}\right)=\frac{1}{2}$ (0.5)

$\int_2^3\frac{dx}{x^{0.99}}$ phân kỳ nên $\int_2^\infty\frac{x^{1.01}}{2x^2+\sqrt{4+x^2}}dx$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn. (0.5)

7. Chuỗi đã cho là chuỗi số dương và $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2^{2k+1}(k+1)^2}{5^{k+2}}:\frac{2^{2k-1}k^2}{5^{k+1}}\right)=\frac{4}{5}<1$ (0.5)

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn tỷ số. (0.5)

8. $f(x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$ (0.25)

$$=\ln 2+\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$ (0.5)

Hệ số của x^{10} là $\frac{(-1)^{5+1}}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{160}$ (0.25)

9. $a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi(1-x)dx+\int_\pi^{2\pi}dx\right)=2-\frac{\pi}{2}$ (0.25)

$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi(1-x)\cos nxdx+\int_\pi^{2\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]$ (0.25)

$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi(1-x)\sin nxdx+\int_\pi^{2\pi}\sin nxdx\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ (0.25)

Tại $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$, ta có khai triển Fourier

$$f(x)=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^\infty\left\{\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx+\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}$$ (0.25)